УДК 519.21

Оленко А. Я., Павлов Д. В.

ДЕЯКІ ОЦІНКИ БЛИЗЬКОСТІ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ТА СПЕКТРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Наводяться деякі оцінки близькості кореляційних та спектральних функцій однорідних ізотропних у широкому розумінні випадкових полів, якщо кореляційні або спектральні функції однакові на деякій множині.

У багатьох розділах теорії ймовірностей та математичної статистики важливим апаратом дослідження є ймовірнісні метрики. Результатів, які стосуються багатовимірних ймовірнісних метрик, отримано досить небагато [2, 3, 4, 6]. У даній праці продовжується вивчення випадкових полів за допомогою ймовірнісних метрик.

Нехай $F_1(x), F_2(x)$ — функції розподілу випадкових величин. У статті розглядатимуться такі ймовірнісні метрики ([1]):

а) рівномірна метрика (Колмогорова):

$$\rho(F_1, F_2) = \sup_{x\in\Re} |F_1(x) - F_2(x)|;$$

б) середня метрика $\kappa_1(F_1, F_2) = \int\limits_{\Re} |F_1(x) - F_2(x)| dx$.

Нехай $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ $(x \in \Re^n)$ — середньоквадратично неперервні однорідні ізотропні в широкому розумінні випадкові поля з нульовим середнім. Для такого поля $\gamma(x), x \in \Re^n$ кореляційна функція $B_n(t,s) = B_n(|t-s|)$ має вигляд ([5]):

$$B_n(t) = 2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \int\limits_0^{+\infty} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\lambda \cdot t)}{(\lambda \cdot t)^{\frac{n-2}{2}}} d\Phi_n(\lambda) \quad \forall t \geq 0,$$

де $J_\nu(z)$ — циліндрична функція Бесселя першого роду $\Phi_n(\lambda)$ — обмежена неспадна неперервна зліва функція

$$\Phi_n(0) = 0, B_n(0) = \int\limits_0^{\infty} d\Phi_n(\lambda).$$

Якщо $B_n(0) = 1$, то Φ_n — функція розподілу. Надалі так і вважатимемо.

Кореляційні функції полів $\gamma_1(x), \gamma_2(x)$ позначатимемо $B_{n,1}(t)$, $B_{n,2}(t)$, спектральні функції — $\Phi_{n,1}(\lambda), \Phi_{n,2}(\lambda)$ відповідно.

У цій роботі будуть використовуватись такі умови:

$$\exists H > 0: \forall r \in [0; H] \quad B_{n,1}(r) = B_{n,1}(r); \tag{1}$$

$$\exists K > 0: \forall \lambda \in [0; K] \quad \Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,1}(\lambda); \tag{2}$$

$$\exists c > 0: \forall \lambda \geq c \quad \Phi_{n,1}(\lambda) = \Phi_{n,2}(\lambda). \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай виконується умова (1) і*

$$\int\limits_0^{+\infty} |\Phi_{n,1}(u) - \Phi_{n,2}(u)| du < +\infty, \ n > 1.$$

Тоді

а) $$\sup_{t\geq 0} \frac{|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)|}{t} \leq \frac{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{\pi}{H};$$

б) $$\sup_{t\geq 0} \frac{|B_{n,1}(t) - B_{n,2}(t)|}{t} \leq \frac{2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-1)\cdot\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_t^{+\infty} |\Phi_{n,1}(u) - \Phi_{n,2}(u)| du + 3\sqrt{2}\,(t+2)\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}} \right).$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (1)—(2), $\Phi_{n,1} - \Phi_{n,2}$ кусково неперервно диференційовна, $n \geq 5$, $M_{\frac{n}{2}} = \sup\limits_{z\geq 0} \left|J_{\frac{n}{2}}(z)\right|$.*

Тоді,

а) *якщо $\Phi_{n,1}(\lambda)$ має обмежену щільність $p_{n,1}(\lambda)$, то*

$$\sup_{t\geq 0}\left(\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\cdot t^{\frac{n-4}{2}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-4)\cdot K^{\frac{n-4}{2}}}\cdot M_{\frac{n}{2}}\cdot\left(1+\sup_{\lambda\geq 0}p_{n,1}(\lambda)\right)\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

б) *якщо існує* $\Phi'_{n,1}(\lambda)$, *то*

$$\sup_{t\geq 0}\left(\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\cdot t^{\frac{n-4}{2}}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2^{\frac{n}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(n-4)\cdot K^{\frac{n-4}{2}}}\cdot M_{\frac{n}{2}}\cdot\frac{48}{\pi H}\sup_{\lambda\geq 0}\left|\Phi'_{n,1}(\lambda)\right|.$$

Теорема 3. *Нехай* η_n *має функцію розподілу*

$$F_{\eta_n}(x)=\begin{cases}1 & \forall x\geq 1,\\ \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\displaystyle\int_{-1}^{x}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du & \forall x\in[-1;1],\\ 0 & \forall x\leq -1\end{cases}$$

випадкові величини ξ_1,ξ_2 *не залежать від* η_n, *нехай*

$$\int_0^{+\infty}\left|F_{\xi_1}(\lambda)-F_{\xi_2}(\lambda)\right|d\lambda<+\infty, F_{\xi_1}(0)=F_{\xi_2}(0)=0.$$

Нехай $\exists H>0$: $\forall t\in[0;H]$ $\varphi_{\xi_1\eta_n}(t)=\varphi_{\xi_2\eta_n}(t)$,

де φ_ξ — *характеристична функція випадкової величини* ξ.

Тоді,

а) $$\frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot(n-1)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left|\int_0^{+\infty}\left(F_{\xi_1}(\lambda)-F_{\xi_2}(\lambda)\right)d\lambda\right|\leq$$

$$\leq\kappa_1(\xi_1\cdot\eta_n,\xi_2\cdot\eta_n)\leq$$

$$\leq\frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot(n-1)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\frac{\pi}{H};$$

б) $$\frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot(n-1)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdot\left|\int_0^{+\infty}\left(F_{\xi_1}(\lambda)-F_{\xi_2}(\lambda)\right)d\lambda\right|\leq$$

$$\leq\kappa_1(\xi_1\cdot\eta_n,\xi_2\cdot\eta_n)\leq\frac{2\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\cdot(n-1)\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\times$$

$$\times\left(\int_t^{+\infty}\left|\Phi_{n,1}(u)-\Phi_{n,2}(u)\right|du+3\sqrt{2}(t+2)\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right).$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (1), (3), нехай* $\alpha_{n,t,1}<\ldots<\alpha_{n,t,k}$ — *послідовні без пропусків корені функції* $g_{n+2,t}(\lambda)=\dfrac{J_{\frac{n}{2}}(\lambda t)}{(\lambda t)^{\frac{n}{2}}}$, *нехай* $\alpha_{n,t,k}<c$, $\alpha_{n,t,1}>0$. *Покладемо* $\alpha_{n,t,0}=0$, $\alpha_{n,t,k+1}=c$.

Тоді

а) *якщо* $\Phi_{n,1}(\lambda)$ *має обмежену щільність* $p_{n,1}(\lambda)$, то $\forall t\geq 0$ $\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq$

$$\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sum_{j=0}^{k}\left|g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1})-g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right|\times$$

$$\times\left(1+\sup_{\lambda\geq 0}p_{n,1}(\lambda)\right)\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

б) *якщо існує* $\Phi'_{n,1}(\lambda)$, то $\forall t\geq 0$ $\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq$

$$\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\sum_{j=0}^{k}\left|g_{n,t}(\alpha_{n,t,j+1})-g_{n,t}(\alpha_{n,t,j})\right|\frac{48}{\pi H}\sup_{\lambda\geq 0}\left|\Phi'_{n,1}(\lambda)\right|.$$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови (1), (3). Тоді,*

а) *якщо* $\Phi_{n,1}(\lambda)$ *має обмежену щільність* $p_{n,1}(\lambda)$, *то* $\forall t\geq 0$ $\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq$

$$\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot V\left(g_{n,t};[0;c]\right)\cdot\left(1+\sup_{\lambda\geq 0}p_{n,1}(\lambda)\right)\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}};$$

б) *якщо існує* $\Phi'_{n,1}(\lambda)$, *то* $\forall t\geq 0$ $\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq$

$$\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot V\left(g_{n,t};[0;c]\right)\cdot\frac{48}{\pi H}\sup_{\lambda\geq 0}\left|\Phi'_{n,1}(\lambda)\right|;$$

в) $\forall t>0$ $$\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot t\cdot\sup_{\lambda\in[0;c]}\left|\frac{J_{\frac{n}{2}}(\lambda t)}{(\lambda t)^{\frac{n-2}{2}}}\right|\times$$

$$\times\left(\int_y^{+\infty}\left|\Phi_{n,1}(u)-\Phi_{n,2}(u)\right|du+3\sqrt{2}(y+2)\left(\frac{\pi\sqrt{n}}{H}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right);$$

г) $\forall t>0$ $$\left|B_{n,1}(t)-B_{n,2}(t)\right|\leq 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot t\cdot\sup_{\lambda\in[0;c]}\left|\frac{J_{\frac{n}{2}}(\lambda t)}{(\lambda t)^{\frac{n-2}{2}}}\right|\cdot$$

1. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин.— М.: Наука, 1986.

2. *Маляренко А. А.* Узагальнення однієї теореми Ессеена // Вісник Київського університету. Математика і механіка.— 1979.—Вип. 21.

3. *Olenko A. Ya.* On properties of spectral and correlation functions // 4th World congress of the Bernoulli Society. Abstracts.—Viena, 1996.— P. 363—364.

4. *Olenko A. Ya.* On proximity of the spectral functions of homogeneous isotropic fields // Theory of Probability and Mathematical Statistics.— 1993.— N 46.— P. 117—119.

5. *Ядренко М. И.* Спектральная теория случайных полей.— К: КГУ, Вища школа, 1980.

6. *Павлов Д. В.* Деякі співвідношення ймовірнісних метрик у спектральній теорії випадкових полів // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.—1999.—Вип. 2.—С 135—141.

Olenko A. Ya., Pavlov D. V.

ON SOME ESTIMATES FOR THE CLOSENESS OF CORELLATION AND SPECTRAL FUNCTIONS OF RANDOM FIELDS

Some estimates for the closeness of corellation and spectral functions of homogeneous isotropic random fields if corellation or spectral functions are the same on some set are given.